

乐山市高中 2023 届期末教学质量检测

数 学

(试卷满分:150 分 考试时间:120 分钟)

本试题卷分第一部分(选择题)和第二部分(非选择题)两部分. 第一部分 1 至 2 页, 第二部分 3 至 4 页. 考生作答时, 须将答案答在答题卡上, 在本试题卷、草稿纸上答题无效. 满分 150 分, 考试时间 120 分钟. 考试结束后, 将本试题卷和答题卡一并交回.

第一部分(选择题 共 60 分)

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. $\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1$ 的等差中项是

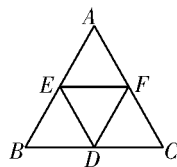
- (A) $\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{2}$ (C) 1 (D) 2

2. $\sin 72^\circ \cdot \sin 48^\circ - \sin 18^\circ \cdot \sin 42^\circ =$

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $-\frac{1}{2}$

3. 如图, D, E, F 分别是等边 $\triangle ABC$ 各边的中点, 则下列结论成立的是

- (A) $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DF}$ (B) $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$
(C) $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD}$ (D) $2\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AC}$



4. 设 $P=(a+1)(a-5)$, $Q=2a(a-3)$, 则有

- (A) $P>Q$ (B) $P\geq Q$ (C) $P<Q$ (D) $P\leq Q$

5. 设 \mathbf{a} 是非零向量, λ 是非零实数, 下列结论正确的是

- (A) \mathbf{a} 与 $\lambda\mathbf{a}$ 的方向相同 (B) \mathbf{a} 与 $-\lambda\mathbf{a}$ 的方向相反
(C) $|- \lambda\mathbf{a}| = |-\lambda| \cdot \mathbf{a}$ (D) $|- \lambda\mathbf{a}| = |-\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$

6. $a, b \in \mathbb{R}$, 下列命题正确的是

- (A) 若 $a \neq |b|$, 则 $a^2 \neq b^2$ (B) 若 $a > b$, 则 $a^2 > b^2$
(C) 若 $a > |b|$, 则 $a^2 > b^2$ (D) 若 $|a| > b$, 则 $a^2 > b^2$

7. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 90$, 则 $a_3 + a_9 =$

- (A) 18 (B) 30 (C) 36 (D) 72

8. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b 分别是角 A, B 的对边, 若 $\frac{a}{\cos B} = \frac{b}{\cos A}$ 成立, 那么 $\triangle ABC$ 的形状是

- (A) 直角三角形 (B) 等腰三角形
(C) 等腰或直角三角形 (D) 无法判断

9. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 且 $2a \cos C = 2b - c$, 则 $A =$

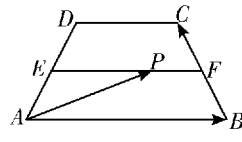
- (A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{2\pi}{3}$ (D) $\frac{3\pi}{4}$

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, 若 $a_n \overrightarrow{OB} = n \overrightarrow{OA} + a_{n-1} \overrightarrow{OC} (n \geq 2)$, 且 A, B, C 三点共线 (该直线不过点 O), 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为

- (A) $a_n = \frac{n^2 + n}{2}$ (B) $a_n = n^2 - n + 1$
(C) $a_n = \frac{n^2 + 3n - 2}{2}$ (D) $a_n = n^2 - n + 2$

11. 如图, 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形, E, F 分别是腰 AD, BC 的中点, 点 P 是 EF 的一个三分点, $AB = 2CD$, 若 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{BC}$, 则 $\lambda + \mu =$

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$
(C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{5}{4}$



12. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_7 = a_6 + 2a_5$, 若存在两项 a_m, a_n , 使得 $\sqrt{a_m a_n} = 4a_1$ 成立, 则

$\frac{1}{m} + \frac{4}{n}$ 的最小值为

- (A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{5}{3}$ (C) $\frac{25}{6}$ (D) 不存在

第二部分(非选择题 90 分)

注意事项:

1. 考生须用 0.5 毫米黑色墨迹签字笔在答题卡上题目所指示的答题区域内作答,作图题可先用铅笔画线,确认后用 0.5 毫米黑色墨迹签字笔描清楚,答在试题卷上无效.

2. 本部分共 10 小题,共 90 分.

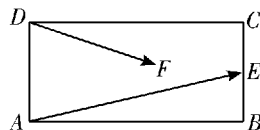
二、填空题:本大题共 4 小题;每小题 5 分,共 20 分.

13. 不等式 $\frac{x-1}{x+2} < 0$ 的解集为_____.

14. 已知 $A(-1,1), B(1,3), C(m,2)$, 如果 $AB \perp BC$, 则 $m =$ _____.

15. 某市出租车的计价标准为 1.2 元/km, 起步价为 6 元, 即最初 3km(不含 3km)计费 6 元. 若某人乘坐该市的出租车去往 13km 处的目的地, 且一路畅通, 等候时间为 0, 那么他需要支付的车费为_____.

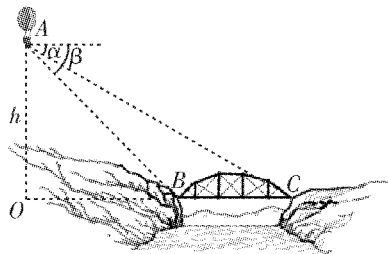
16. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=2, BC=1, E$ 为 BC 的中点, 若 F 是该矩形内(含边界)任意一点, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DF}$ 的取值范围为_____.



三、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或推演步骤.

17. (本题满分 10 分)

如图, 河流上有一座桥, 其长度 $BC=100\text{m}$, 在桥的两端 B, C 处测得空中一气球的仰角分别为 $\alpha=30^\circ, \beta=45^\circ$, 试求气球的高度 h .



18. (本题满分 12 分)

已知 $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1), a = 2e_1 + \lambda e_2, b = e_1 - e_2$, 且 $a \parallel b$.

(1) 求 λ 的值;

(2) 求向量 a 与向量 $c = e_1 + 2e_2$ 夹角的余弦.

19. (本题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 且 $a_3 = 7, a_5 = 3$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 的最大值.

20. (本题满分 12 分)

某地要修建一条大型输油管道通过 240km 宽的沙漠地带,该段输油管道两端的输油站已建好,余下工程是在该段两端已建好的输油站之间铺设输油管道和等距离修建增压站(又称泵站).经预算,修建一个增压站的费用为 400 元,铺设距离为 x km 的相邻两增压站之间的输油管道费用为 (x^2+x) 万元.设余下工程的总费用为 y (万元).

(1)试将 y 表示为 x 的函数;

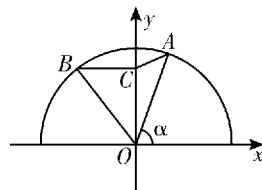
(2)需要修建多少个增压站才能使 y 最小,其最小值为多少?

21. (本题满分 12 分)

如图,在平面直角坐标系中,角 α 的顶点在原点,始边与 x 轴的非负半轴重合,终边交单位圆于点 A ,且 $\alpha \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$,将角 α 的终边绕原点逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{3}$,交单位圆于点 B ,过 B 作 $BC \perp y$ 轴于点 C .

(1)若点 A 的纵坐标为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,求点 B 的横坐标;

(2)求 $\triangle AOC$ 的面积 S 的最大值;



22. (本题满分 12 分)

已知单调等比数列 $\{a_n\}$ 中,首项 $a_1 = \frac{1}{2}$,其前 n 项和为 S_n ,且 $\frac{1}{2}a_3 + S_3, S_5, a_4 + S_4$ 成等差数列,数列 $\{b_n\}$ 满足条件 $\frac{1}{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n} = (\sqrt{2})^{b_n}$.

(1)求数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式;

(2)设 $c_n = a_n - \frac{1}{b_n}$,记数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n .

①求 T_n ;

②求正整数 k ,使得对任意 $n \in N^*$,均有 $T_k \geq T_n$.